NOME E COGNOME .... CLASSE .... DATA ....

PROBLEMA 1

Lucia prepara un caffè bollente e lo versa nella tazza. La temperatura iniziale del caffè è $T_0 = 80$ °C e quella della stanza è $T_a = 20$ °C. Il caffè inizia a raffreddarsi e la sua temperatura come funzione del tempo è data dalla legge:

$$T(t) = T_a - (T_a - T_0)\,e^{-kt}$$

dove k rappresenta una costante.

a. Trova l'unità di misura di k, supponendo che il tempo sia misurato in minuti.

Posto ora $k = 0{,}1$ (nell'unità di misura trovata in **a.**):

b. trova quanto tempo ci mette il caffè a scendere alla temperatura $T_f = 40$ °C;
c. traccia il grafico della funzione $T(t)$, individuandone l'asintoto;
d. spiega il significato fisico dell'asintoto di $T(t)$.

Lucia si mette a riflettere sul fatto che, verosimilmente, se la temperatura ambiente fosse più alta (ad esempio, se fosse estate), il tempo di raffreddamento del caffè sarebbe più lungo. Decide quindi di studiare la funzione che descrive il tempo τ di raffreddamento da $T_0 = 80$ °C a $T_f = 40$ °C in funzione della temperatura ambiente.

e. Scrivi τ come funzione di T_a.
f. Qual è il dominio di $\tau(T_a)$ relativamente al contesto analizzato? Per quale motivo non si possono accettare valori di $T_a \geqslant 80$?
g. Traccia il grafico di $\tau(T_a)$ nell'intervallo $T_a \in [0, 40)$ e spiega il significato dell'asintoto.

PROBLEMA 2

Considera la seguente famiglia di funzioni, al variare del parametro reale k:

$$f_k(x) = \frac{x^2}{x^2 - k}$$

a. Spiega l'affermazione seguente: "tutti i grafici delle funzioni f_k tranne uno hanno un punto comune".
b. Trova il dominio di f_k, distinguendo i casi al variare di $k \in \mathbb{R}$.
c. Stabilisci la presenza di eventuali asintoti, distinguendo i casi al variare di $k \in \mathbb{R}$.
d. Studia la monotonia delle funzioni f_k, individuando gli eventuali punti di massimo e/o minimo.
e. Considera ora la curva $g(x) = f_{-1}(x)$ e tracciane il grafico, individuando anche gli eventuali punti di flesso.
f. Trova l'area della regione di piano del primo quadrante compresa tra l'asse $x = 0$, la retta $y = 1$ e il grafico di g.

In un sistema di riferimento cartesiano, considera la circonferenza $C : x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ e la retta r: $y = 1$. Prendi il fascio di rette passanti per l'origine: interseca una sua retta con C e con r individuando, rispettivamente, due punti M e N (senza contare l'origine degli assi, intersezione di qualunque retta del fascio con la circonferenza).

g. Dimostra che il luogo dei punti P che hanno l'ascissa di N e l'ordinata di M è il grafico della funzione $h(x) = 1 - g(x)$. Questa curva si chiama *versiera di Maria Gaetana Agnesi*.

QUESITI

1. Dimostra che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è lunga metà della stessa ipotenusa.
2. Si circoscrive un cono circolare retto a una semisfera di raggio R. Qual è il raggio di base del cono che ha minore superficie laterale possibile?
3. Filippo lancia una moneta: se esce testa va a destra, se esce croce va a sinistra. Dopo dieci lanci, qual è la probabilità che si trovi 4 passi a destra rispetto all'inizio?
4. Dimostra che, dati due punti A e B della parabola $y = x^2$, con $y_A = y_B$, l'area della regione individuata dalla parabola e dal segmento AB è $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo che ha come due lati opposti il segmento AB e la sua proiezione sull'asse x.
5. Trova i massimi e i minimi della funzione $\int_0^t \arctan x \, dx$, per $t \in [0, 1]$.
6. Trova per quali valori dei parametri reali a e b la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ a & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   risulta continua e derivabile in $x = 0$.
7. Dopo aver trovato la distanza R tra il punto $P(1; 1; 1)$ e l'origine, individua il piano che passa per P e che è tangente alla sfera di centro l'origine e raggio R.
8. Individua gli eventuali asintoti obliqui della funzione $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} + 2x$.