Quesiti

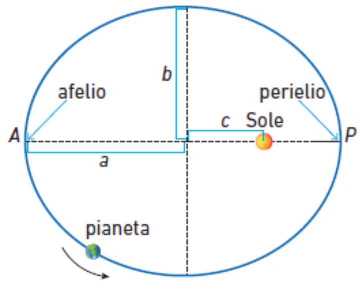
1. È dato un triangolo *ABC*, rettangolo in *B*. Dimostrare che tale triangolo è isoscele se e solo se l'altezza BH relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.
2. Si lancia 5 volte una moneta truccata che dà testa con probabilità p.
   - Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte?
   - Per quale valore di *p* la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte è massima?
3. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, è dato il piano π: $3x - 2y + 5 = 0$.
   - Determinare le coordinate del punto H, proiezione ortogonale di $P(4; 2; 1)$ sul piano π.
   - Determinare l'intersezione della retta s: $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$ con il piano π.
4. Dimostrare che l'equazione $x^3 + x - \cos x = 0$ ammette un'unica soluzione positiva.
5. Determinare la funzione polinomiale di quarto grado $y = p(x)$ sapendo che, in un sistema di riferimento cartesiano, il suo grafico verifica le seguenti condizioni:
   - è tangente all'asse *x* nell'origine;
   - passa per il punto $(1; 0)$;
   - ha un punto stazionario in $(2; -2)$.
6. Si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_a^x \frac{\cos\frac{1}{t}}{t^2}\, dt$, con $x \geq a$, in cui a indica un parametro reale positivo. Determinare il più grande valore di a in modo che $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$.
7. Il prossimo 5 luglio la terra raggiungerà l'afelio, il punto della propria orbita in cui è massima la distanza dal Sole, pari a circa $1{,}52 \cdot 10^{11}$ m. Il perielio è invece il punto che si trova alla minima distanza dal Sole, pari a circa $1{,}47 \cdot 10^{11}$ m. Determinare, in un opportuno sistema di riferimento, l'equazione che rappresenta la traiettoria della Terra intorno al Sole
8. Scrive Carlo Emilio Gadda in uno dei racconti de L'Adalgisa – Disegni milanesi: «Le stanze del servizio, il bagno, i corridoi, l'anticamera e l'uno de' due gabinetti, eran pavimentati con piastrelle rosse di piccolo formato: esagonali […]. L'apotèma di quelle mattonelle misurava centimetri 5,196: mentreché il raggio del circolo circoscritto raggiungeva i 60 millimetri». Esprimere la relazione esatta tra raggio del cerchio circoscritto ed apotema (ossia il raggio del cerchio inscritto) per un esagono regolare. Verificare il risultato ottenuto alla luce delle misure indicate dallo scrittore. Spiegare perché, utilizzando piastrelle esagonali regolari tutte congruenti, è possibile pavimentare un piano. Con quali altri poligoni regolari, tra loro congruenti, è possibile pavimentare un piano? Motivare la risposta.

Svolgimenti

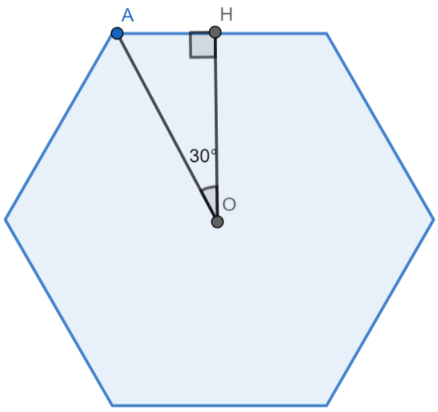
1. Se ABC è isoscele, BH è bisettrice dell'angolo $\widehat{ABC}$, quindi il triangolo ABH è isoscele di base AB e il triangolo BHC è isoscele di base BC. Ne segue che $BH \cong AH \cong HC$. Viceversa, se BH è congruente a $\frac{1}{2}AC$ si ha, per il teorema di Euclide:
$$\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 = AH(AC - AH)$$
da cui $AH = \frac{1}{2}AC$. Pertanto BH è anche mediana. Di conseguenza, i triangoli ABH e CBH sono congruenti (sono rettangoli, hanno in comune il cateto BH e $AH \cong HC \cong \frac{1}{2}AC$). In particolare, $AB \cong BC$, da cui si ottiene che il triangolo ABC è isoscele.
In alternativa, si può osservare che un triangolo rettangolo è isoscele se e solo se è la metà di un quadrato, e poi sfruttare la caratterizzazione dei quadrati come parallelogrammi con diagonali congruenti e perpendicolari tra loro.

2. La probabilità di ottenere una sequenza di lanci con due teste e tre croci è: $p^2(1-p)^3$. Il numero di queste sequenze è $P(5,2)=\frac{5!}{2!3!}=10$, quindi la probabilità richiesta è $P(p)=10p^2(1-p)^3$.
Cerchiamo il massimo della funzione P sull'intervallo $[0,1]$.
$$P(p)=10p^2(1-p)^3 \Rightarrow P'(p)=10(2p(1-p)^3-3p^2(1-p)^2)=10p(1-p)^2(2-2p-3p)$$
$$=10p(1-p)^2(2-5p)$$
Di conseguenza, si ha $P'(p)=0$ per $p=0$, $p=1$, $p=\frac{2}{5}$. Dato che $P(0)=P(1)=0$, il massimo di P su $[0,1]$ è $p=\frac{2}{5}$.
3. Una generica retta perpendicolare a π ha vettore direzione $(3;\ -2;\ 0)$, e ha quindi equazione parametrica:
$$r\colon \begin{cases} x=3t+A \\ y=-2t+B \\ z=C \end{cases}$$
Imponendo il passaggio per P in $t=0$ otteniamo $A=4$, $B=2$, $C=1$. L'intersezione di questa retta con π si ottiene imponendo che:
$$3(3t+4)-2(-2t+2)+5=0 \Rightarrow t=-1$$
In corrispondenza di questo valore di t si ottiene il punto $H(1;4;1)$.
L'intersezione della retta s con il piano π si calcola risolvendo il sistema:
$$\begin{cases} 3x-2y+5=0 \\ x-y+1=0 \\ z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2(x+1)+5=0 \\ y=x+1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \\ z=2 \end{cases}$$
4. Definiamo la funzione $f(x)=x^3+x-\cos\ x$. Osserviamo che f è continua su $\mathbb{R}$, $f(0)=-1<0$ e $f(1)=2-\cos 2>0$. Di conseguenza, il teorema degli zeri garantisce che l'equazione $f(x)=0$ ha una soluzione positiva. Inoltre si ha $f'(x)=2x^2+1+\operatorname{sen}x>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, quindi f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Questo garantisce che, se l'equazione assegnata ha una soluzione, essa è unica.
In alternativa, l'unicità dello zero si può dimostrare con il teorema di Rolle: se f avesse due zeri x_1 e x_2, si potrebbe applicare il teorema di Rolle in $[x_1,x_2]$ e ottenere che $f'(x)=0$ per qualche $x\in[x_1,x_2]$, contraddicendo $f'(x)>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.
5. La prima condizione ci dice che il polinomio $p(x)$ è multiplo di x^2, mentre la seconda ci dice che è multiplo di $(x-1)$. Pertanto, si ha $p(x)=x^2(x-1)(ax+b)=(x^3-x^2)(ax+b)$. Utilizziamo la terza condizione per determinare a e b. Deve valere $p(2)=2^2(2a+b)=-2$, da cui si ricava $2a+b=-\frac{1}{2}$, e $p'(2)=0$. Calcoliamo p':
$$p'(x)=(3x^2-2x)(ax+b)+(x^3-x^2)a$$
Di conseguenza, $p'(2)=8(2a+b)+4a=0$. Sostituendo l'espressione di $2a+b$ ricavata prima si ha: $-4+4a=0$, da cui $a=1$ e $b=-\frac{5}{2}$.
Il polinomio cercato è quindi: $p(x)=x^4-\frac{7}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2$.
6. Una primitiva della funzione $f(x)=\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}$ è $G(x)=-\operatorname{sen}\frac{1}{x}$. Di conseguenza, applicando la formula di Leibniz-Newton otteniamo:
$$F(x)=G(x)-G(a)=-\operatorname{sen}\frac{1}{x}+\operatorname{sen}\frac{1}{a}$$
Vogliamo che $F\left(\frac{2}{\pi}\right)=-\frac{1}{2}$. Questo implica:
$$=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{a}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee \frac{1}{a}=\frac{5}{6}\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$
Il valore più grande di a per cui si ha l'uguaglianza desiderata è quindi $a=\frac{6}{\pi}$.
In alternativa, si può calcolare l'integrale $\int_a^x \frac{\cos\frac{1}{t}}{t^2}dt$ con la sostituzione $z=\frac{1}{t}$.

7. L'orbita della Terra intorno al Sole è un'ellisse, e il Sole si trova in un fuoco. Rappresentiamo l'orbita in un piano cartesiano, in cui i due assi giacciono sugli assi (l'asse maggiore sull'asse x) e si intersecano nell'origine. Come unità di misura usiamo i metri.
Chiamiamo S il punto in cui si trova il Sole e P il punto di perielio e A quello di afelio.
Dai dati sappiamo che:
$\overline{AS} \approx 1{,}52 \cdot 10^{11}$
$\overline{SP} \approx 1{,}47 \cdot 10^{11}$
Allora nel nostro sistema di riferimento, $\overline{AP} \approx 2{,}99 \cdot 10^{11}$, da cui otteniamo che il semiasse maggiore è:
$a \approx 1{,}495 \cdot 10^{11}$
Allora la distanza di S dall'origine degli assi è:
$$c = \overline{AS} - a \approx 0{,}025 \cdot 10^{11}$$
Possiamo allora ricavare anche il semiasse minore:
$$b^2 = a^2 - c^2 \approx 2{,}235025 \cdot 10^{22} - 0{,}000625 \cdot 10^{22} = 2{,}234400 \cdot 10^{22}$$
Allora l'equazione dell'ellisse è:
$$\frac{x^2}{2{,}235025} + \frac{y^2}{2{,}234400} = 10^{22}$$



8. Con riferimento alla figura seguente, in cui OH è uno degli apotemi di un esagono regolare, si ha:
$$\frac{OH}{AO} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866 = \frac{5{,}196}{6}$$



In un vertice di una tassellazione del piano con poligoni regolari si incontrano n poligoni diversi. Pertanto, una condizione necessaria affinché un poligono regolare pavimenti un piano è che i suoi angoli interni abbiano una misura che è un sottomultiplo di 360°. Questo è possibile solo per i triangoli regolari (i cui angoli misurano $60° = \frac{360°}{6}$), quadrato ($90° = \frac{360°}{4}$), esagono ($120° = \frac{360°}{3}$). Si può dimostrare che tutte e tre le forme danno origine a una tassellazione del piano. Tutti gli altri poligoni regolari hanno gli angoli interni che non sono divisori di 360°, quindi non è possibile utilizzarli per pavimentare un piano.

Problema 1

Si consideri $f_{a,b}(x) = \frac{ax^3+b}{x^2}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinare i valori dei parametri in modo che la retta t, di equazione $7x + y - 12 = 0$, sia tangente al grafico di $f_{a,b}(x)$ nel suo punto P di ascissa $x = 1$.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$ e $b = 4$.

b) Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$ e tracciarne il grafico γ. Scrivere l'equazione dell'ulteriore retta tangente alla curva γ passante per P.

c) Al variare del parametro reale m, determinare il numero di intersezioni tra la retta di equazione $y - 5 = m(x - 1)$ e la curva γ.

d) Sia $S(k)$, con $k > \frac{3}{2}$, l'area della regione finita di piano compresa tra la curva γ, il suo asintoto obliquo, la retta t e la retta di equazione $x = k$. Calcolare il $\lim\limits_{k\to+\infty} S(k)$, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

Svolgimento

$$f_{a,b}(x) = \frac{ax^3 + b}{x^2} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

a) Innanzitutto osserviamo che deve essere $x \neq 0$.
Il punto $P(1; y_P)$ appartiene al grafico della funzione. Troviamo y_P, in funzione dei parametri, sostituendo $x = 1$ nell'espressione di $f_{a,b}$:

$y_P = a + b$

Cerchiamo i valori dei parametri tali che la retta t: $7x + y - 12 = 0$ sia tangente a $f_{a,b}$ nel punto $P(1; a + b)$. Innanzitutto, troviamo il punto di ascissa 1 che appartiene alla retta, sostituendo $x = 1$ nella sua equazione:
$7 + y - 12 = 0 \;\Rightarrow\; y = 5$
Allora P deve essere il punto di coordinate $(1; 5)$, cioè $a + b = 5$, da cui $b = 5 - a$.
Scriviamo la funzione come $f_{a,b}(x) = ax + \frac{5-a}{x^2}$.
Calcoliamo la derivata della funzione per $x = 1$:
$f'_{a,b}(x) = a - \dfrac{2(5-a)}{x^3} \;\Rightarrow\; f'_{a,b}(1) = a - 2(5-a) = 3a - 10$
Vogliamo che questo valore coincida con il coefficiente angolare di t, cioè:
$3a - 10 = -7 \;\Rightarrow\; a = 1$

I valori dei parametri richiesti sono quindi $a = 1, b = 5 - a = 4$.

b) La funzione $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2}$ è definita sull'insieme dei numeri reali privato dello zero: $\mathbb{R}_0$.
Determiniamo la presenza di eventuali simmetrie:$f(-x) = -x + \frac{4}{x^2}$ non è uguale né a $f(x)$ né a $-f(x)$. Perciò f non è né pari né dispari.

La funzione è continua sul suo dominio. Troviamo le intersezioni con l'asse x:

$$\frac{x^3 + 4}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x^3 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\sqrt[3]{4}$$

Il grafico della funzione passa per $A(-\sqrt[3]{4}; 0)$.
Non ci sono intersezioni con l'asse y poiché $x = 0$ non appartiene al dominio della funzione.

Ci chiediamo dove vale $f(x) > 0$:
$$\frac{x^3 + 4}{x^2} > 0$$
Poiché il denominatore è sempre positivo sul dominio della funzione, dobbiamo risolvere:
$x^3 + 4 > 0 \ \Rightarrow \ x^3 > -4$
Poiché la funzione cubica è crescente, la soluzione è $x > -\sqrt[3]{4}$.
Calcoliamo i limiti agli estremo del dominio.

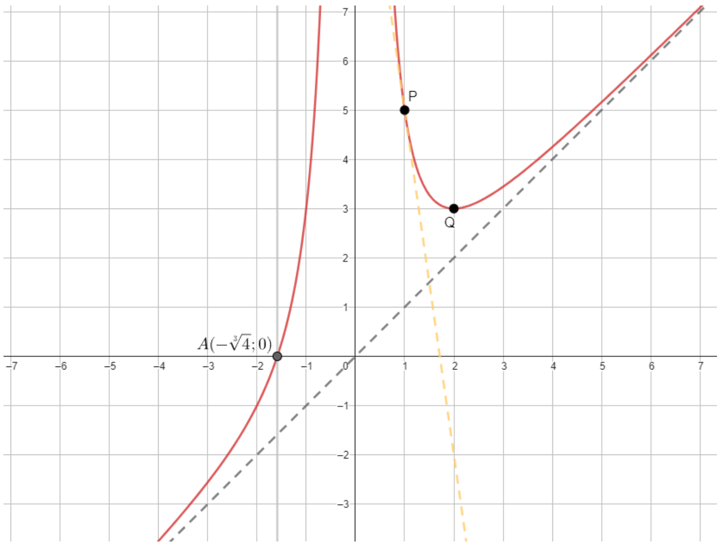
$$\lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{4}{x^2}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to0}\left(x + \frac{4}{x^2}\right) = +\infty$$

La funzione presenta un asintoto verticale, che è $x = 0$. Non ha, invece, asintoti orizzontali.
Potrebbe avere asintoti obliqui (essendo la funzione $y = x$ sommata a un infinitesimo, ci aspettiamo che l'asintoto obliquo sia proprio $y = x$). Lo verifichiamo.
Poiché:
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\frac{4}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{4}{x^3}\right) = 1$$
possiamo cercare un eventuale asintoto sinistro con coefficiente angolare 1. Calcoliamo ora:
$$\lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2} = 0$$
da cui confermiamo l'esistenza dell'asintoto.
Gli stessi identici calcoli valgono a $+\infty$, quindi concludiamo che $y = x$ è asintoto obliquo (sinistro e destro) per la funzione.
Studiamo ora la monotonia di f, utilizzando le informazioni fornite dalla derivata prima. Ci chiediamo quando $f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} > 0$. Abbiamo:
$$\frac{x^3 - 8}{x^3} > 0$$
Poiché il numeratore è positivo per $x > 2$ e il denominatore per $x > 0$, abbiamo che la funzione è crescente per $x < 0 \vee x > 2$.
Dato che la funzione è derivabile, cerchiamo i massimi e i minimi tra i suoi punti critici. Si ha $f'(x) = 0$ per $\frac{x^3-8}{x^3} = 0$, cioè per $x = 2$. Per tale valore di x, abbiamo $f(x) = 2 + \frac{4}{4} = 3$, cioè otteniamo il punto $Q(2; 3)$.
Poiché la funzione decresce nell'intervallo $(0, 2)$ e cresce in $(2, +\infty)$, si tratta di un punto di minimo.

Studiamo infine la convessità di f studiando il segno di f'':

$$f''(x) = \frac{24}{x^4} > x \text{ per ogni } x \neq 0$$

La derivata seconda è sempre positiva, quindi la funzione è ovunque convessa. Raccogliendo tutti gli elementi studiati, possiamo rappresentare un grafico probabile della funzione.



Cerchiamo ora la retta tangente richiesta. Per farlo, intersechiamo la generica retta del fascio $y - 5 = m(x - 1)$ con il grafico della curva:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2} \\ y - 5 = m(x - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(x - 1) + 5 = \dfrac{x^3 + 4}{x^2} \\ y = m(x - 1) + 5 \end{cases}$$

La prima equazione si può scrivere come:
$m(x - 1)x^2 = x^3 + 4 - 5x^2$
Siccome sappiamo che per ogni valore di m l'equazione deve annullarsi per $x = 1$, cerchiamo di mettere in evidenza questo fattore, scomponendo il polinomio al secondo membro:
$m(x - 1)x^2 = (x^2 - 4x - 4)(x - 1)$
Le altre intersezioni tra la retta e la curva si hanno per:
$mx^2 = x^2 - 4x - 4 \quad \Rightarrow \quad x^2(m - 1) + 4x + 4 = 0$
Se $m = 1$, l'equazione è di primo grado: $4x + 4 = 0$, da cui otteniamo una sola soluzione ulteriore.
Calcoliamo $\frac{\Delta}{4}$ di questa equazione e chiediamoci quando si annulla:

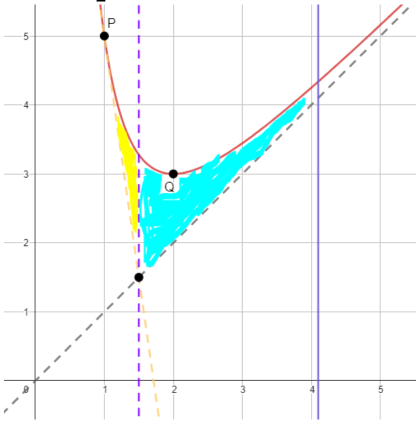
$$\frac{\Delta}{4} = 4 - 4(m - 1) = -4m + 8$$

Per $m = 2$, il delta è nullo: la retta corrispondente è tangente alla curva (nel ramo del semipiano negativo delle ascisse). Tale retta è $y = 2x + 3$.

c) Osserviamo che il fascio dato è quello delle rette passanti per $P(1; 5)$, che è un punto della curva, in cui sappiamo già che la retta t del punto a) è l'unica tangente in tale punto (retta si ottiene per $m = -7$) e l'altra tangente è $y = 2x + 3$ (ottenuta per $m = 2$).
Abbiamo già visto anche che, se $m = 1$, l'intersezione è una sola, oltre a P. Inoltre, dallo studio del delta, abbiamo che: per $m < 2$ il delta è positivo, per $m > 2$ è negativo.
Ne deduciamo che:

- per $m = -7$ si ha la retta t, che ha 3 intersezioni, di cui 2 coincidenti in P;
- per $m = 1$, le intersezioni sono 2 distinte.
- per $m < 2, m \neq -7, m \neq 1$, le intersezioni sono 3 distinte;
- per $m = 2$ le intersezioni sono 3, di cui due coincidenti (la retta $y = 2(x - 1) + 5$ interseca il grafico in $(1; 5)$ ed è tangente al ramo di sinistra della curva);
- per $m > 2$, l'unica intersezione è il punto P.

d) La retta t e l'asintoto obliquo si intersecano nel punto che ha ascissa che soddisfa $-7x+12=x$, che dà $x=\frac{3}{2}$. Perciò la regione finita di piano richiesta è costituita da due parti:



La parte in giallo è costante, mentre la parte in azzurro varia al variare della retta blu, che è $x=k$.
Allora, per $k>\frac{3}{2}$:

$$S(k)=\int_1^{\frac{3}{2}}\left[\left(x+\frac{4}{x^2}\right)-(-7x+12)\right]dx+\int_{\frac{3}{2}}^{k}\left[\left(x+\frac{4}{x^2}\right)-x\right]dx=$$

$$=\int_1^{\frac{3}{2}}\left(8x+\frac{4}{x^2}-12\right)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{k}\frac{4}{x^2}\,dx=$$

$$=\left[4x^2-\frac{4}{x}-12x\right]_1^{\frac{3}{2}}+\left[-\frac{4}{x}\right]_{\frac{3}{2}}^{k}=$$

$$=9-\frac{8}{3}-18-4+4+12+\left(-\frac{4}{k}+\frac{8}{3}\right)=$$

$$=3-\frac{4}{k}$$

Si ha $\lim_{k\to+\infty}S(k)=3$. Tale valore esprime l'area della regione illimitata di piano compresa tra γ, la retta tangente a γ in P e l'asintoto obliquo.

Problema 2

Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$.

a) Verificare che, qualunque sia il valore di n, la funzione f_n non è derivabile nel punto di ascissa $x = 0$. Determinare il valore di n in corrispondenza del quale il grafico di f_n presenta un punto angoloso. Per opportuni valori dei parametri a, b, il grafico α, in figura, rappresenta la funzione $f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$. Determinare i parametri a e b, considerando che f_2 è definita in $[-1, 1]$ e che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = -1$, $b = 0$.

b) Studiare la funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}$, verificando che non è derivabile negli estremi del dominio e nel punto di ascissa $x = 0$. Indicare con β il suo grafico e tracciare la curva $\gamma = \alpha \cup \beta$.
c) La retta r, di equazione $x = k$, con $-1 < k < 1$, interseca γ nei punti P e Q. Dimostra che la misura del segmento PQ è massima quando r è asse di simmetria di γ.
d) Veriricare che la funzione $H(x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1 - x^2}\right)$ è una primitiva della funzione $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Con il metodo che si ritiene più opportuno, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da γ.

Svolgimento

a) Osserviamo che $x = 0$ è interno al dominio di ciascuna delle funzioni f_n. Per $x \neq 0$ e $ax^2 + bx + 1 \neq 0$ si ha:

$$f_n'(x) = \frac{2}{n} x^{\frac{2}{n}-1} \frac{x}{|x|} - \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}}$$

Per $n \neq 2$ si ha, grazie a un corollario del teorema di De l'Hopital:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f_n(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} f_n'(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f_n(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} f_n'(x) = -\infty$$

Pertanto, per $n \neq 2$, f_n presenta una cuspide in $x = 0$.
Per $n = 2$, invece, si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f_n(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} f_n'(x) = 1 - \frac{b}{2}$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f_n(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} f_n'(x) = -1 + \frac{b}{2}$$

In questo caso, in $x = 0$ si ha un punto angoloso.
In alternativa, si può osservare che la radice quadrata è derivabile in tutti i punti del suo dominio, escluso 0. Di conseguenza, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$, la funzione $A(x) = \sqrt{ax^2 + bx + 1}$ è derivabile in $x = 0$, in quanto il radicando non si annulla. Invece, per $n > 1$, la funzione $B_n(x) = \sqrt[n]{x^2}$ non è derivabile in $x = 0$. Infatti, per $n = 2$ si ha $B_2(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, che ha un punto angoloso in $x = 0$. Invece, per $n > 2$ si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{B_n(x) - B_n(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[n]{x^2}}{x} = +\infty \text{ e } \lim_{x \to 0^-} \frac{B_n(x) - B_n(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt[n]{x^2}}{x} = -\infty$$

Di conseguenza, per $n > 2$ la funzione B_n ha una cuspide in $x = 0$. Se $f_n(x) = A(x) + B_n(x)$ fosse derivabile in $x = 0$, allora lo sarebbe anche la funzione $B_n(x) = f_n(x) - A(x)$, in quanto differenza di funzioni derivabili. Ma abbiamo già verificato che $B_n(x)$ non è derivabile in $x = 0$: possiamo

concludere che nemmeno $f_n(x)$ lo è. Per quanto già visto sul comportamento della funzione B_n, il valore di n in corrispondenza del quale il grafico di f_n presenta un punto angoloso è $n = 2$.
Il grafico α della funzione f_2 è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate: in altre parole, $f_2(x)$ è pari. Quindi si deve avere:

$$f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1} = f_2(-x) = |-x| - \sqrt{a(-x)^2 - bx + 1} = |x| - \sqrt{ax^2 - bx + 1}$$

L'unico valore di b per il quale questa uguaglianza è verificata è $b = 0$. L'informazione che $f_2(x)$ è definita in $[-1, 1]$ ci dice che anche $\sqrt{ax^2 + 1}$ deve essere definita per tutti e soli gli $x \in [-1, 1]$: ricaviamo che $a = -1$.

b) La funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}$ è definita per quei valori di x che verificano:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 \Rightarrow x \in [-1, 1]$$

Osserviamo che g è pari e non negativa, in quanto somma di funzioni non negative. Inoltre, g è continua in $[-1, 1]$. Per $x \neq \pm 1$ e $x \neq 0$ si ha:

$$g'(x) = \frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Con un ragionamento analogo a quello effettuato al punto precedente, si ricava che:
- g ha un punto angoloso in $x = 0$;
- g non è derivabile in $x = -1$ (il limite del rapporto incrementale per $x \to -1^+$ è $+\infty$) e nemmeno in $x = 1$ (il limite del rapporto incrementale per $x \to -1^+$ è $-\infty$).

Anche in questo caso, si sarebbe potuti giungere alle stesse conclusioni calcolando direttamente i limiti del rapporto incrementale nei tre punti.
Procediamo con lo studio di funzione di g. I limiti agli estremi del dominio sono: $\lim_{x \to -1^+} g(x) = g(-1) = g(1) = \lim_{x \to 1^-} g(x) = 1$. La funzione non presenta asintoti.
Studiamo la monotonia della funzione sull'intervallo $(0, 1)$, in cui è derivabile, e poi estendiamo quanto determinato all'intero intervallo $[-1, 1]$ sfruttando la simmetria. In $(0, 1)$ si ha:

$$g'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Calcoliamone il segno:

$$g'(x) > 0 \text{ se } 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \Rightarrow \sqrt{1 - x^2} > x$$

Entrambi i membri sono positivi in $(0, 1)$: possiamo dunque elevare al quadrato e ottenere la disequazione equivalente:

$$1 - x^2 > x^2 \Rightarrow 2x^2 < 1 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

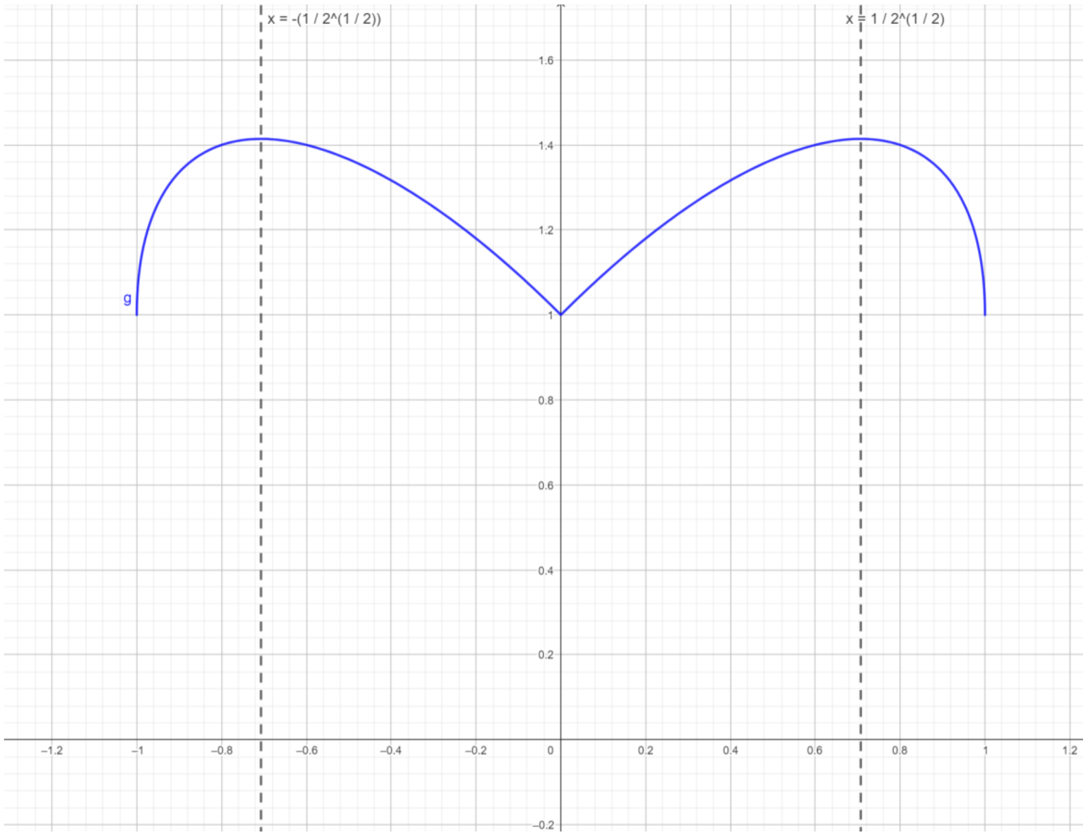
Riassumiamo quanto trovato in una tabella, in cui includiamo anche quanto possiamo ricavare sulla monotonia di g.

	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
Segno di $g'(x)$		+++++++++	0	---------	
Monotonia di $g'(x)$		Strettamente crescente		Strettamente decrescente	

Dallo studio della monotonia e dal fatto che $g(-1) = g(0) = g(1) = 0$, deduciamo inoltre che i punti $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$ sono di minimo assoluto per g, mentre $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono di massimo assoluto.
Studiamo infine la convessità di g studiando il segno di g'' su $(0, 1)$.

$$g''(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3} = \frac{x^2-1-x^2}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3} = -\frac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3} < 0 \text{ per ogni } x \in (0, 1)$$

La funzione g è quindi concava su $(0, 1)$ e, separatamente, su $(-1, 0)$. Il suo grafico probabile β è rappresentato in figura.



c) Dato che γ è simmetrica rispetto all'origine, studiamo il problema ristretto a $0 \leq k < 1$. I punti di intersezione della retta r di equazione $x = k$ con γ sono:

$$P\big(k, g(k)\big) = \left(k, |k| - \sqrt{1-k^2}\right) \text{ e } Q\big(k, g(k)\big) = \left(k, |k| + \sqrt{1-k^2}\right)$$

Si ha quindi

$$PQ = |k| + \sqrt{1-k^2} - \left(|k| - \sqrt{1-k^2}\right) = 2\sqrt{1-k^2}$$

Dobbiamo trovare il punto di massimo assoluto della funzione $D(k) = 2\sqrt{1-k^2}$ in $[0, 1)$. Per monotonia della radice quadrata, tale punto è anche il punto di massimo assoluto della funzione $y = 1 - k^2$ ristretta all'intervallo $[0, 1)$. Si tratta di una funzione strettamente decrescente, che quindi ha punto di massimo assoluto in $k = 0$, come si voleva dimostrare.

d) Ricordiamo che la derivata della funzione $y = \operatorname{arcsen} x$ è $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Di conseguenza:

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$
$$= \sqrt{1-x^2}$$

Per simmetria, l'area della regione finita di piano delimitata da γ è uguale al doppio dell'area della regione finita di piano delimitata da γ e contenuta nel semipiano $x \geq 0$. Quest'ultima area è uguale a:

$$\int_0^1 g(x) - f_2(x)\, dx = \int_0^1 |x| + \sqrt{1-x^2} - \left(|x| - \sqrt{1-x^2}\right) dx = \int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\, dx$$

Calcoliamo questo integrale con la formula di Leibniz-Newton, sapendo che una primitiva di $2\sqrt{1-x^2}$ è $2H(x) = \operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}$.

$$\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\, dx = \left[\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \operatorname{arcsen} 1 - \operatorname{arcsen} 0 = \frac{\pi}{2}$$

Ricordiamo che questa è la metà dell'area desiderata, che è quindi uguale a π.