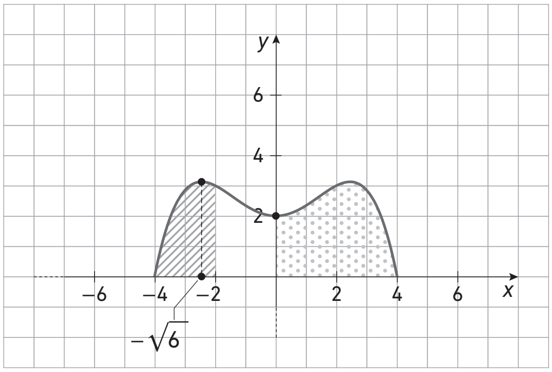
NOME E COGNOME .... CLASSE .... DATA ....

PROBLEMA 1

La funzione f rappresentata nella seguente figura è derivabile nell'intervallo $[-4, 4]$ ed è pari.



Sappiamo che l'area della regione tratteggiata è $\frac{24}{5}$ e quella della regione puntinata è $\frac{48}{5}$.

a. Trova i punti di massimo e di minimo della funzione $F(t) = \int_{-4}^{t} f(x)\, dx$, e i corrispondenti valori del massimo e del minimo.

b. Trova gli eventuali punti di flesso di F.

c. Risolvi l'equazione $F(x) = \frac{72}{5}$ e spiega perché la soluzione esiste ed è unica.

d. Traccia un grafico qualitativo di F.

e. Considera la funzione $G_k(t) = \int_{k}^{t} f(x)\, dx$ e determina k in modo tale che $G_k(t)$ sia dispari.

f. Per il valore di k trovato sopra, determina h in modo tale che $G_k(x) = F(x) + h$.

g. Presumi che f sia una funzione polinomiale di IV grado e individuane l'espressione analitica.

PROBLEMA 2

Considera un circuito RLC in corrente alternata in cui i tre elementi R, L e C sono in serie.

Il rapporto $\frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$ tra la tensione efficace (ovvero il valore quadratico medio della tensione) e la corrente efficace (il valore quadratico medio della corrente) in funzione della frequenza x si comporta dal punto di vista qualitativo come la funzione:

$$f(x) = \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

a. Studia il segno, le simmetrie e la continuità di f.

b. Studia i limiti di f agli estremi del dominio ed eventuali singolarità di f.

c. Determina eventuali punti di estremo assoluto di f.
(*Suggerimento*: osserva che la radice quadrata è strettamente crescente, quindi puoi studiare i punti di estremo della funzione sotto radice e poi spiegare come essi sono in relazione ai punti di estremo della funzione f.)

d. Trova gli asintoti della funzione f e traccia il grafico qualitativo di f (tralascia lo studio della derivata seconda).

QUESITI

1. Determina i valori dei parametri a e b in modo tale che la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} a e^x + b \ln(x+1) & \text{se } -1 < x \leqslant 0 \\ bx^3 + 1 & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

sia derivabile nell'intervallo di definizione.

2. Verifica che la funzione $f(x) = x - \arctan x$ non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle in alcun intervallo $[-k, k]$ con k reale positivo ma, nonostante ciò, $f(x)$ possiede un punto stazionario nel medesimo intervallo.

3. Si deve progettare una lattina di alluminio cilindrica. Il materiale a disposizione corrisponde a una superficie totale di area $A = 4\pi\ \text{dm}^2$. Trova i valori dell'altezza h e del raggio di base r che rendono massimo il volume della lattina.

4. In un rettangolo la diagonale misura 2, mentre α è l'ampiezza di uno degli angoli compresi tra la diagonale e un lato. Dopo aver individuato quale intervallo di valori può assumere α, determina i valori di α per cui il rettangolo ha area massima.

5. Trova la distanza tra il punto $A(1; 0; -1)$ e la retta $r: \begin{cases} x + z = y - 1 \\ y = -z + 1 \end{cases}$.

6. Qual è il minimo valore n di lanci di una moneta non truccata affinché la probabilità che non esca mai testa sia minore dello 0,05%?

7. Dimostra che l'equazione $\ln(x+3) = 5^x - 1$ ha almeno una soluzione reale compresa tra -1 e 1 utilizzando il teorema degli zeri.

8. Calcola $\lim_{x \to 0} \left(x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \right)$.