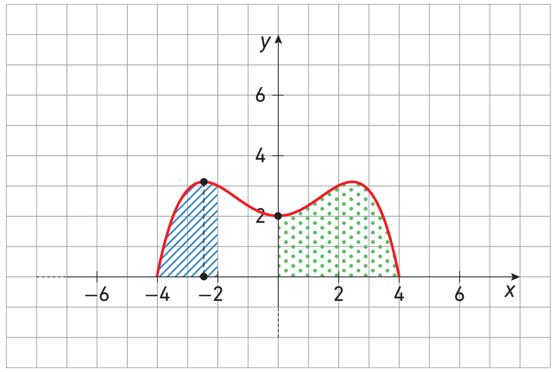
Simulazione d’Esame svolta

seconda prova di Matematica costituita da 2 problemi e 8 quesiti sul modello delle prove ministeriali

A cura di Giovanna Guidone,
Giuseppe De Ninno, Michele Mattiacci,
Emanuele Bottazzi, Irene Matuonto

PROBLEMA 1

La funzione f rappresentata nella seguente figura è derivabile nell'intervallo $[-4, 4]$ ed è pari.



Sappiamo che l'area della regione tratteggiata è $\frac{24}{5}$ e quella della regione puntinata è $\frac{48}{5}$.

a. Trova i punti di massimo e di minimo della funzione $F(t) = \int_{-4}^{t} f(x)\,dx$, e i corrispondenti valori del massimo e del minimo.

b. Trova gli eventuali punti di flesso di F.

c. Risolvi l'equazione $F(x) = \frac{72}{5}$ e spiega perché la soluzione esiste ed è unica.

d. Traccia un grafico qualitativo di F.

e. Considera la funzione $G_k(t) = \int_{k}^{t} f(x)\,dx$ e determina k in modo tale che $G_k(t)$ sia dispari.

f. Per il valore di k trovato sopra, determina h in modo tale che $G_k(x) = F(x) + h$.

g. Presumi che f sia una funzione polinomiale di IV grado e individuane l'espressione analitica.

PROBLEMA 2

Considera un circuito RLC in corrente alternata in cui i tre elementi R, L e C sono in serie.

Il rapporto $\frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$ tra la tensione efficace (ovvero il valore quadratico medio della tensione) e la corrente efficace (il valore quadratico medio della corrente) in funzione della frequenza x si comporta dal punto di vista qualitativo come la funzione:

$$f(x) = \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

a. Studia il segno, le simmetrie e la continuità di f.

b. Studia i limiti di f agli estremi del dominio ed eventuali singolarità di f.

c. Determina eventuali punti di estremo assoluto di f.
(*Suggerimento*: osserva che la radice quadrata è strettamente crescente, quindi puoi studiare i punti di estremo della funzione sotto radice e poi spiegare come essi sono in relazione ai punti di estremo della funzione f.)

d. Trova gli asintoti della funzione f e traccia il grafico qualitativo di f (tralascia lo studio della derivata seconda).

QUESITI

1. Determina i valori dei parametri a e b in modo tale che la funzione:
$$f(x)=\begin{cases} a e^x + b\ln(x+1) & \text{se } -1<x\leqslant 0 \\ bx^3+1 & \text{se } 0<x\leqslant 2 \end{cases}$$
sia derivabile nell'intervallo di definizione.
2. Verifica che la funzione $f(x) = x - \arctan x$ non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle in alcun intervallo $[-k, k]$ con k reale positivo ma, nonostante ciò, $f(x)$ possiede un punto stazionario nel medesimo intervallo.
3. Si deve progettare una lattina di alluminio cilindrica. Il materiale a disposizione corrisponde a una superficie totale di area $A = 4\pi \text{ dm}^2$. Trova i valori dell'altezza h e del raggio di base r che rendono massimo il volume della lattina.
4. In un rettangolo la diagonale misura 2, mentre α è l'ampiezza di uno degli angoli compresi tra la diagonale e un lato. Dopo aver individuato quale intervallo di valori può assumere α, determina i valori di α per cui il rettangolo ha area massima.
5. Trova la distanza tra il punto $A(1; 0; -1)$ e la retta $r: \begin{cases} x+z=y-1 \\ y=-z+1 \end{cases}$.
6. Qual è il minimo valore n di lanci di una moneta non truccata affinché la probabilità che non esca mai testa sia minore dello 0,05%?
7. Dimostra che l'equazione $\ln(x+3) = 5^x - 1$ ha almeno una soluzione reale compresa tra -1 e 1 utilizzando il teorema degli zeri.
8. Calcola $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \operatorname{sen}^2\dfrac{1}{x}\right)$.

SVOLGIMENTO PROBLEMA 1

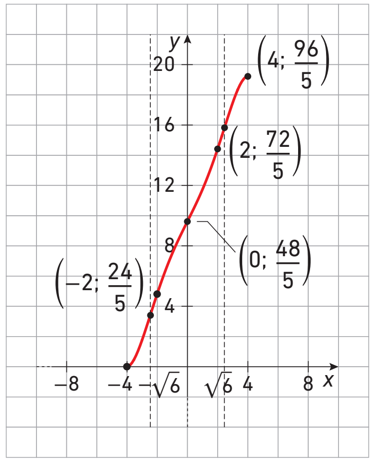
a. La funzione f è derivabile, e quindi continua. Per il teorema fondamentale del calcolo F risulta derivabile e vale $F'(t) = f(t)$ per ogni $t \in [-4, 4]$. Dato che f è positiva su $(-4, 4)$, F è strettamente crescente. Di conseguenza il punto di minimo assoluto di F è $t=-4$ e il punto di massimo assoluto è $t = 4$. Si ha inoltre: $F(-4)=\int_{-4}^{-4} f(x)\,dx = 0$. Per calcolare $F(4)=\int_{-4}^{4} f(x)\,dx$, osserviamo che, per la parità di f, si ha $\int_{-4}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{4} f(x)\,dx$. Inoltre, sappiamo che $\int_{0}^{4} f(x)\,dx = \frac{48}{5}$. Di conseguenza, $F(4) = 2\cdot\frac{48}{5} = \frac{96}{5}$.

b. Sono i punti in cui la derivata di f si annulla, cioè $x=0, x=\pm\sqrt{6}$.

c. La funzione F è continua e, per quanto stabilito al punto **a.**, ha come immagine l'intervallo $\left[0, \frac{96}{5}\right]$. Dato che $\frac{72}{5} \in \left[0, \frac{96}{5}\right]$, l'equazione ha almeno una soluzione. Tale soluzione è unica perché F è una funzione crescente, come abbiamo già verificato al punto **a.**
Osserviamo infine che $F(2)=\int_{-4}^{2} f(x)\,dx = \int_{-4}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx$ e, per simmetria della funzione, il primo di questi due integrali è uguale a $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$. Perciò $F(2)=\frac{48}{5}+\frac{24}{5}=\frac{72}{5}$, cioè la soluzione dell'equazione è $x = 2$.

d. Sappiamo che F è crescente, con $F(-4) = 0$; inoltre, poiché la funzione è pari, sommando le aree fornite dai dati, sappiamo che il suo grafico passa per $\left(-2; \frac{24}{5}\right)$, $\left(0; \frac{48}{5}\right)$, $\left(2; \frac{72}{5}\right)$, $\left(4; \frac{96}{5}\right)$.

Inoltre, ha i flessi in corrispondenza di $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{6}$. Un grafico qualitativo è il seguente:



e. Affinché G_k sia dispari, occorre che $G_k(0) = \int_k^0 f(x)\,dx = 0$. Dato che f è positiva su su $(-4, 4)$, l'unico valore di k per cui questa uguaglianza è vera è $k = 0$. In effetti, l'integrale $G_0(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ calcola l'area sotto il grafico di f per $t > 0$, mentre per $t < 0$ dà l'opposto di tale area. Essendo f una funzione pari, si ha perciò $G_0(-t_0) = -G(t_0)$, cioè che G_0 è dispari.

f. Abbiamo: $F(t) = \int_{-4}^t f(x)\,dx = \int_{-4}^0 f(x)\,dx + \int_0^t f(x)\,dx = \frac{48}{5} + G_0(t)$. Perciò $h = -\frac{48}{5}$.

g. Sappiamo che la derivata di f è una funzione di terzo grado con zeri in 0 e $\pm\sqrt{6}$, perciò è della forma:

$$f'(x) = kx(x^2 - 6) = kx^3 - 6kx$$

Ma allora f si ottiene integrando f', perciò è della forma:

$$f(x) = \frac{k}{4}x^4 - 3kx^2 + c$$

Poiché il grafico di f passa per $(0; 2)$, la funzione avrà termine noto uguale a 2:

$$f(x) = \frac{k}{4}x^4 - 3kx^2 + 2$$

Ora poniamo che f si annulli in 4:

$$f(4) = \frac{k}{4}4^4 - 3k \cdot 4^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 64k - 48k = -2 \quad \Rightarrow \quad 16k = -2 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{8}$$

Allora abbiamo che l'espressione analitica di f è:

$$f(x) = -\frac{1}{32}x^4 + \frac{3}{8}x^2 + 2$$

SVOLGIMENTO PROBLEMA 2

a. Innanzitutto, osserviamo che $f(x) = \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$ è una funzione positiva nel suo campo di esistenza, che è $\mathbb{R}_0$. Inoltre, si tratta di una funzione pari:

$$f(-x) = \sqrt{1 + \left(-x + \frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = f(x)$$

Per il teorema della continuità delle funzioni elementari, f è una funzione continua laddove sono continue le funzioni da cui è composta, dunque in $\mathbb{R}_0$.

b. Dobbiamo controllare i limiti per x che tende a $-\infty$, $+\infty$ e 0. Per quanto riguarda $+\infty$, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=+\infty$$

Dato che la funzione è pari, si ha anche:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=+\infty$$

Studiamo il comportamento nell'origine:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=+\infty$$

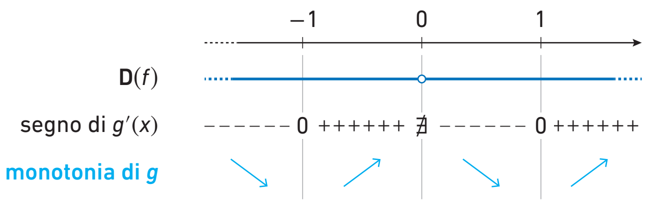
Poiché abbiamo trovato un limite non finito (tanto da destra quanto da sinistra) possiamo concludere che la funzione presenta una singolarità essenziale nell'origine.

c. Seguiamo il suggerimento e studiamo la funzione $g(x)=1+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$: dato che $f(x)=\sqrt{g(x)}$, la funzione f risulta crescente o decrescente negli stessi intervalli in cui g lo è. Di conseguenza, i punti di estremo di f sono gli stessi di g; quello che cambia è il valore della funzione nei punti di estremo.
Si ha quindi:

$$g'(x)=2\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=2x+\frac{2}{x}-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}=2x-\frac{2}{x^3}$$

$$g'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x-\frac{2}{x^3}=0 \quad\Rightarrow\quad x^4-1=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 1$$

Per quanto riguarda il segno di g', si ha:



Di conseguenza, g (e quindi f) è strettamente crescente su $(-1, 0)$ e su $(0, +\infty)$, mentre è strettamente decrescente su $(-\infty, 0)$ e su $(0, 1)$. Da questa analisi, si ricava che entrambi i punti $x=\pm 1$ sono di minimo per g (e quindi per f). Dalla monotonia e osservando che la funzione è pari e in tali punti la funzione assume lo stesso valore, ricaviamo che entrambi $x=1$ e $x=-1$ sono minimi assoluti.
Il valore minimo assunto da f in tali punti è $f(\pm 1)=\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{1}\right)^2}=1$.

d. Il limite già trovato per $x\to 0$ ci permette di affermare che $x=0$ è un asintoto verticale per la funzione.
Abbiamo già verificato che i limiti a $+\infty$ e $-\infty$ sono infiniti: ha quindi senso chiedersi se f presenti anche asintoti obliqui. Iniziamo a cercarli calcolando il limite:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}}=1$$

Risulta quindi verificata la condizione necessaria per l'esistenza di un asintoto obliquo.

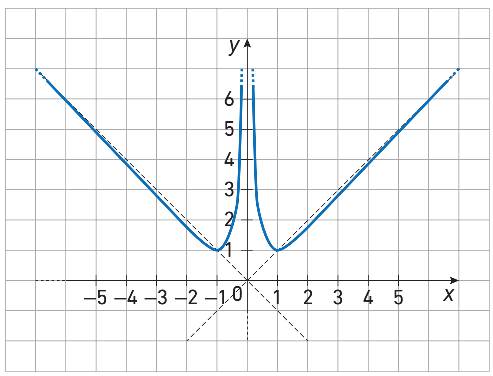
Cerchiamo se esiste ed è finito il limite che ci dovrebbe fornire il termine noto della retta:

$$q = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{x} \right)^2} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} - x \right)\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} + x \right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} + x} = 0$$

Per $x \to +\infty$, il numeratore tende a -1 e il numeratore a $+\infty$: per le estensioni dell'algebra dei limiti, si ricava che $q = 0$.
La bisettrice del I e III quadrante $y = x$ è dunque asintoto obliquo destro. La simmetria della funzione ci permette di concludere che $y = -x$ è asintoto obliquo sinistro.
Mettendo insieme tutte le informazioni ricavate, concludiamo che la funzione f ha l'andamento mostrato nella figura.



SVOLGIMENTO QUESITI

1. Osserviamo innanzitutto che, in tutti i punti dell'intervallo di definizione $(-1, 2]$, a esclusione di $x = 0$, la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} a e^x + b \ln(x+1) & \text{se } -1 < x \leqslant 0 \\ bx^3 + 1 & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

è sicuramente derivabile, in quanto costituita da somme e composizioni di funzioni derivabili.
Per ottenere la continuità anche nel punto $x = 0$, devono valere le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^-} [a e^x + b \cdot \ln(x+1)] = \lim_{x \to 0^+} (bx^3 + 1) = a \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

Nei prossimi calcoli, sostituiamo questo valore nell'espressione di $f(x)$. Affinché f sia derivabile, deve valere:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$$

Abbiamo:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + \dfrac{b}{x+1} & \text{se } -1 < x < 0 \\ 3bx^2 & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Sostituendo nell'uguaglianza $\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^+} f'(x)$, otteniamo:

$$\lim_{x\to0^-}\left(e^x + \frac{b}{x+1}\right) = \lim_{x\to0^+} 3bx^2 \quad \Rightarrow \quad 1+b=0 \quad \Rightarrow \quad b=-1$$

2. La funzione $f(x) = x - \arctan x$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}$. Pertanto dovremo dimostrare che per ogni valore positivo di k, $f(-k) \neq f(k)$ per nessun valore $k \in \mathbb{R}^+$. Esplicitando l'espressione analitica di f nell'equazione precedente, otteniamo:

$$-k - \arctan(-k) = k - \arctan k$$

Dato che l'arcotangente è una funzione dispari, questa condizione implica che:

$$-k + \arctan k = k - \arctan k \quad \Rightarrow \quad \arctan k = k$$

Riassumendo: la funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle sull'intervallo $[-k, k]$ se e solo se $\arctan k = k$, ovvero se e solo se $\arctan k - k = 0$. Dimostriamo che quest'uguaglianza è vera solo per $k = 0$. Infatti, se consideriamo la funzione ausiliaria $g(k) = \arctan k - k$ si ha $g(0) = 0$ e $g'(k) < 0$. La funzione è pertanto sempre decrescente e si annulla quindi solo per $k = 0$.
Nonostante quanto appena visto, f verifica la tesi del teorema di Rolle, perché la derivata si annulla in $x = 0$. Infatti:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x^2} = 1$$

L'unica soluzione è $x = 0$, che appartiene all'intervallo $[-k, k]$ per ogni k positivo.

3. Dalla condizione sull'area $2\pi r^2 + 2\pi rh = 4\pi$ otteniamo $h = \frac{2}{r} - r$, che ci permette di esprimere il volume in funzione di un'unica variabile, ad esempio r. Con questa scelta, abbiamo:

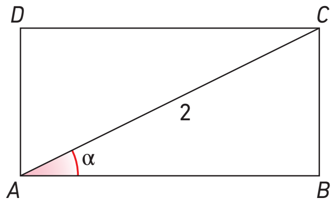
$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2\left(\frac{2}{r} - r\right) = \pi\left(2r - r^3\right)$$

Cerchiamo ora il massimo tra i punti critici della funzione V. Si ha:

$$V'(r) = \pi(2 - 3r^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Poiché r rappresenta una lunghezza, accettiamo solo la soluzione positiva $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$ dm, da cui ricaviamo $h = \frac{1}{\sqrt{6}}$ dm e $V = \frac{2}{3\sqrt{6}}\pi$ dm^3.

4. La situazione si presenta come in figura.



Determiniamo i cateti del triangolo ABC in funzione di α:

$$AB = 2\cos\alpha,\ BC = 2\,\mathrm{sen}\,\alpha \quad \text{con } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Pertanto l'area del rettangolo è $A = 4\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha = 2\,\mathrm{sen}\,2\alpha$. La funzione $\mathrm{sen}\,x$ ha massimo in $x = \frac{\pi}{2}$, quindi la funzione $2\,\mathrm{sen}\,2\alpha$ ha massimo in $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Per questo valore di α, il rettangolo diventa un quadrato.

5. Una strategia per risolvere il quesito è scrivere l'equazione del piano π che passa per A ed è perpendicolare a r. Trovando poi l'intersezione B tra π e la retta, si può calcolare la distanza AB.
Esprimiamo la retta in forma parametrica: poniamo $z = t$, da cui $y = -t + 1$. Sostituendo nella prima equazione, si ricava anche $x = -2t$. L'equazione parametrica di r è quindi:

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases}$$

Possiamo ora utilizzare il vettore direzione di r $(\alpha; \beta; \gamma) = (-2; -1; 1)$ per trovare l'equazione del piano π:

$$\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) + \gamma(z - z_A) = 0$$

Sostituendo i valori ricavati in precedenza otteniamo:

$$-2(x - 1) - y + (z + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x - y + z + 3 = 0$$

Per trovare le coordinate di B dobbiamo sostituire le equazioni parametriche di r nell'equazione appena trovata di π:

$$-2(-2t) - (-t + 1) + t + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{3}$$

Ricaviamo che B è il punto di coordinate: $\begin{cases} x = -2\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Concludiamo che $AB = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

6. Se la moneta non è truccata, la probabilità che a ogni lancio esca testa è $\frac{1}{2}$. In n lanci, la probabilità che non esca mai testa è $p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Vogliamo che sia $p_n < 0{,}05\%$, cioè:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{0{,}05}{100} \quad \to \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n < 5 \cdot 10^{-4}$$

Passando ai logaritmi abbiamo:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n < \ln(5 \cdot 10^{-4}) \quad \Rightarrow \quad n \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln 5 - 4 \ln 10 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\ln 5 - 4 \ln 10}{\ln 1 - \ln 2} \approx 10{,}97$$

Il minimo numero di lanci è dunque $n = 11$.

7. Consideriamo la funzione $f(x) = \ln(x + 3) - 5^x + 1$: essa è continua e definita per $x > -3$, e quindi in particolare su $[-1, 1]$. Si ha $f(-1) = \ln 2 - \frac{1}{5} + 1 > 0$, dato che $\frac{1}{5} < 1$ e $\ln 2 > 0$. Inoltre, $f(1) = \ln 4 - 5 + 1 < 0$, dato che $\ln 4 < 4$. Possiamo quindi applicare il teorema degli zeri: esso ci permette di concludere che esiste $c \in (-1, 1)$ tale che $f(c) = 0$. Per tale valore di c si ha quindi $\ln(c + 3) - 5^c + 1 = 0$, che è equivalente a $\ln(c + 3) = 5^c - 1$.

8. Dato che $0 \leqslant \operatorname{sen}^2\frac{1}{x} \leqslant 1$ per ogni $x \neq 0$, si ha $0 \leqslant x \operatorname{sen}^2\frac{1}{x} \leqslant x$ per ogni $x > 0$ e $x \leqslant x \operatorname{sen}^2\frac{1}{x} \leqslant 0$ per ogni $x < 0$. Dato che:

$$\lim_{x \to 0} x = 0$$

per il teorema dei due carabinieri si ha anche $\lim_{x \to 0}\left(x \operatorname{sen}^2\frac{1}{x}\right) = 0$.