PROBLEMA SVOLTO

Funzioni velocità e accelerazione

- **FISICA** Moto armonico
- **MATEMATICA** Teoremi di De l'Hôpital e di Lagrange

Considera un punto materiale che si muove lungo la direzione x con equazione oraria $x_1(t) = k(t - t^*)^3$, dove lo spostamento è espresso in metri e il tempo in secondi.

a. Qual è l'unità di misura di k?

b. Trova la funzione $v_1(t)$ che descrive la velocità del punto al variare del tempo.

c. Poni $t^* = 1$ s e trova il valore di k che rende l'accelerazione al tempo $t = 0$ s pari a 2 m/s².
Considera ora un secondo punto materiale che si muove di moto armonico, sapendo che all'istante iniziale si trova nella posizione di equilibrio e che arriva al punto A di massimo spostamento dalla posizione di equilibrio per $t = t^*$.

d. Determina le funzioni che descrivono lo spostamento e la velocità del secondo punto, chiamandole rispettivamente $x_2(t)$ e $v_2(t)$.

e. Calcola il limite per $t \to t^*$ del rapporto tra le velocità $v_1(t)/v_2(t)$.

f. Considerando il moto del primo punto con $k = 1$ (nell'opportuna unità di misura), utilizza il teorema di Lagrange per dimostrare che esiste un punto nell'intervallo $[0, t^*]$ tale che l'accelerazione vale $\frac{t^*}{2}$.

SUGGERIMENTI PER LO SVOLGIMENTO

- **Ricorda che per l'equazione oraria del moto armonico puoi scegliere di utilizzare la funzione seno o la funzione coseno.**
- **Nel calcolo del limite puoi pensare agli ordini di infinitesimo, ma ora hai un teorema molto potente da utilizzare per rispondere.**

SVOLGIMENTO PASSO PASSO

a. Poiché $k = \dfrac{x_1(t)}{(t - t^*)^3}$, la costante k dovrà essere espressa in m/s³.

b. Nota l'equazione oraria $x_1(t) = f(t)$, la velocità (espressa in m/s) è data dalla derivata prima $f'(t) = \dfrac{df(t)}{dt}$, quindi abbiamo:

$$v_1(t) = 3k(t - t^*)^2$$

c. Per trovare l'accelerazione (in m/s²) basta calcolare la derivata seconda:

$$a_1(t) = f''(t) = \frac{df'(t)}{dt} = 6k(t - t^*)$$

Imponiamo che valga $a_1(0) = 2$ m/s², con $t^* = 1$ s:

$$a_1(0) = -6k = 2 \Rightarrow k = 0{,}33 \text{ m/s}^3$$

d. La condizione iniziale suggerisce di utilizzare per l'equazione oraria la funzione seno, in modo da avere fase nulla. Il punto materiale raggiunge il massimo spostamento dalla posizione di equilibrio in un quarto di periodo, da cui $T = 4t^*$.
La pulsazione sarà pertanto:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4t^*} = \frac{\pi}{2t^*}$$

da cui ricaviamo l'equazione oraria:

$$x_2(t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2t^*} \cdot t\right)$$

Derivando rispetto al tempo avremo la funzione velocità:

$$v_2(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\pi A}{2t^*} \cos\left(\frac{\pi}{2t^*} \cdot t\right)$$

e. Il limite del rapporto richiesto è:

$$\lim_{t \to t^*} \frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{6kt^*}{\pi A} \lim_{t \to t^*} \frac{(t - t^*)^2}{\cos\left(\frac{\pi}{2t^*} \cdot t\right)}$$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$.
Osserviamo che, per la funzione al denominatore $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2t^*} \cdot t\right)$ si ha che $g'(x) = -\frac{\pi}{2t^*} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2t^*} \cdot t\right)$ è non nullo per ogni intorno di t^*. Sono pertanto soddisfatte le ipotesi del teorema di De l'Hôpital, che ci fornisce la soluzione:

$$\lim_{t \to t^*} \frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{6kt^*}{\pi A} \lim_{t \to t^*} \frac{(t - t^*)^2}{\cos\left(\frac{\pi}{2t^*} \cdot t\right)} = \frac{6kt^*}{\pi A} \lim_{t \to t^*} \frac{2(t - t^*)}{-\frac{\pi}{2t^*} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2t^*} \cdot t\right)} = 0$$

f. Abbiamo $v_1(t) = 3\,(t - t^*)^2$. Tale funzione è continua nell'intervallo $[0, t^*]$ e derivabile in $(0, t^*)$, con derivata uguale a $v_1'(t) = 6(t - t^*)$. Possiamo quindi applicare il teorema di Lagrange e trovare il punto c tale che:

$$v_1'(c) = \frac{v_1(t^*) - v_1(0)}{t^* - 0} = \frac{0 - 3(-t^*)^2}{t^*} = -3t^*$$

Ma allora:

$$v_1'(c) = 6(c - t^*) = -3t^* \quad \Rightarrow \quad 6c = 3t^* \quad \Rightarrow \quad c = \frac{t^*}{2}$$

che è quanto volevamo dimostrare.