PROBLEMA SVOLTO

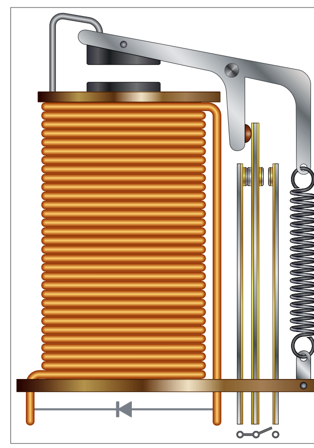
Funzione corrente in un relè

▶ **MATEMATICA** Asintoti e teorema dei valori intermedi
▶ **FISICA** Circuiti RL e leggi di Ohm

Considera la funzione di variabile reale $f(x) = a - a \cdot e^{bx}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a. Determina il valore dei parametri, sapendo che il grafico della funzione passa per il punto di coordinate $(3; 2)$ e che la retta di equazione $y = \frac{5}{2}$ ne costituisce l'asintoto orizzontale destro.

b. Traccia un grafico qualitativo della funzione utilizzando le trasformazioni geometriche note. Dopo aver stabilito, motivando la risposta, se è possibile applicare il teorema dei valori intermedi nell'intervallo $[0, 3]$ delle ascisse, verificane la validità determinando per quale valore della x la funzione assume il valore $\frac{3}{2}$.



Uno dei componenti più importanti degli impianti elettrici è il cosiddetto relè. Si tratta di uno speciale interruttore, non manuale ma a comando elettrico, inventato negli anni Trenta dell'Ottocento, che ancora oggi è indispensabile per la protezione di macchinari e persone. Nella sua versione più semplice, il relè è costituito da un elettromagnete, formato da un solenoide generalmente di rame avvolto intorno a un nucleo di materiale ferromagnetico. Al passaggio di corrente elettrica, l'elettromagnete attrae l'ancora collegata ai contatti elettrici, spostandoli.

In un relè un solenoide, di lunghezza 2,50 cm, è formato da avvolgimenti di raggio 7,50 mm ed è collegato a un circuito *RL* alimentato da una batteria da 0,50 V. Supponi da ora in poi che la funzione sopra studiata rappresenti l'andamento della corrente, espressa in ampere, in funzione del tempo espresso in secondi, del circuito *RL* in fase di chiusura.

c. Determina il numero di avvolgimenti del solenoide e la sua resistenza.

d. Ricordando che il materiale di cui è costituito il solenoide è il rame, con resistività pari a $1{,}72 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$, calcola la sezione del filo.

PER APPROFONDIRE

e. Scrivi la funzione che rappresenta l'andamento della corrente nel circuito *RL* in fase di apertura, determinane analiticamente gli eventuali asintoti e tracciane il grafico.

f. Individua analogie e differenze tra le funzioni sopra citate, che descrivono il funzionamento di un circuito *RL* e quelle che descrivono un circuito *RC*.

SVOLGIMENTO PASSO PASSO

a. Affinché la funzione $f(x) = a - a \cdot e^{bx}$ abbia come asintoto orizzontale destro la retta $y = \frac{5}{2}$, deve essere:

$$\lim_{x \to +\infty} (a - a \cdot e^{bx}) = a - a \cdot \left(\lim_{x \to +\infty} e^{bx}\right) = \frac{5}{2}$$

Notiamo che, affinché esista l'asintoto orizzontale destro, dobbiamo assumere $b < 0$, in modo tale che $\lim_{x \to +\infty} e^{bx}$ sia finito; se fosse invece $b > 0$, avremmo $\lim_{x \to +\infty} e^{bx} = +\infty$ e dunque non si avrebbe l'asintoto orizzontale destro.
Per $b < 0$ vale $\lim_{x \to +\infty} e^{bx} = 0$, perciò l'uguaglianza sopra equivale a $a - a \cdot 0 = \frac{5}{2}$, da cui $a = \frac{5}{2}$.

Per determinare il valore del parametro b imponiamo il passaggio per il punto (3; 2), cioè:

$$2 = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}e^{3b} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}e^{3b} \quad \Rightarrow \quad e^{3b} = \frac{1}{5}$$

Risolviamo l'equazione esponenziale passando al logaritmo:

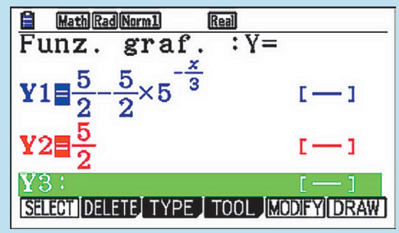
$$3b = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{3}\ln 5$$

Allora la funzione cercata è $f(x) = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}e^{-\frac{\ln 5}{3}x}$.

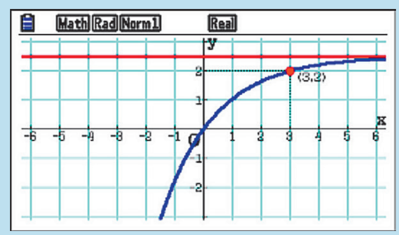
Possiamo osservare che questa funzione si può scrivere come $f(x) = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cdot 5^{-\frac{x}{3}}$.

CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

Accediamo al menu **GRAFICI** e inseriamo in Y1= la funzione $f(x) = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cdot 5^{-\frac{x}{3}}$, digitando l'espressione della funzione. Inseriamo anche, utilizzando il secondo slot, l'espressione dell'asintoto orizzontale $y = \frac{5}{2}$.
Con il tasto **F1(SELECT)** selezioniamo entrambe le funzioni e le rappresentiamo con **F6(DRAW)**.

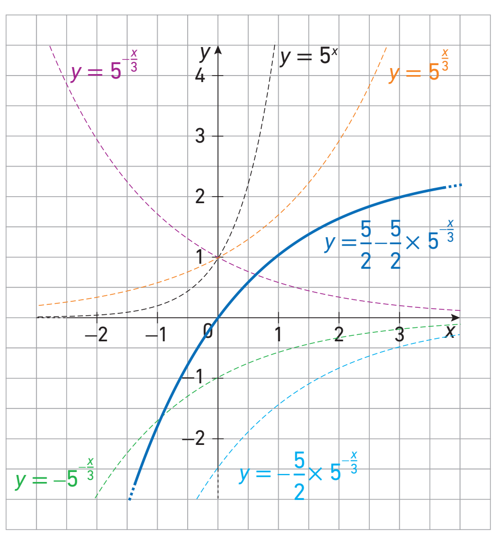


Possiamo impostare la dimensione del grafico con **F3(V-Window)**, mettendo ad esempio −7 e 7 come valori minimo e massimo dell'asse x e −3 e 3 come valori minimo e massimo dell'asse y.
Con tasto **F1(Trace)** possiamo verificare che la funzione passa per il punto (3; 2).



b. Il grafico qualitativo della funzione $f(x)$ si ottiene applicando, in sequenza, al grafico della nota funzione esponenziale $y = 5^x$ le trasformazioni geometriche riportate nello schema seguente:

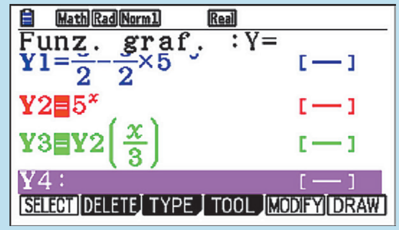
$$y = 5^x \xrightarrow{\text{dilat. orizz.}} y = 5^{\frac{x}{3}} \xrightarrow{\text{simm. risp. asse } y} y = 5^{-\frac{x}{3}} \xrightarrow{\text{simm. risp. asse } x} y = -5^{-\frac{x}{3}} \xrightarrow{\text{dilat. vert.}} y = -\frac{5}{2} \cdot 5^{-\frac{x}{3}} \xrightarrow{\text{trasl. vert.}} y = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cdot 5^{-\frac{x}{3}}$$



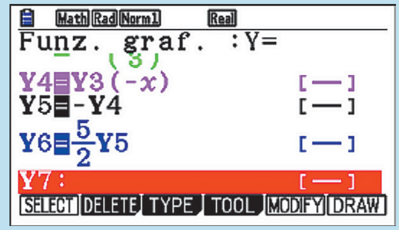
CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

Costruiamo questi grafici con l'aiuto della calcolatrice, così da poter analizzare ogni passaggio.
Per farlo, entriamo nel menu **GRAFICI**, cancelliamo Y2, deselezioniamo Y1 e, nel secondo slot rappresentiamo la funzione $y = 5^x$.
Applichiamo poi le seguenti trasformazioni:

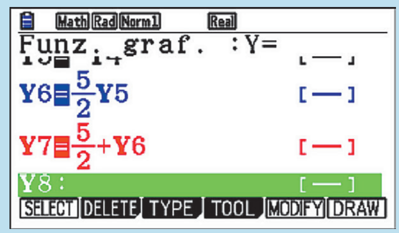
- dilatazione orizzontale: $Y3 = Y2\left(\frac{x}{3}\right)$



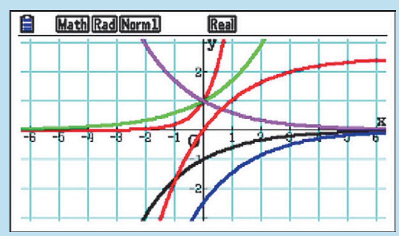
- simmetria rispetto all'asse *y*: $Y4 = Y3(-x)$
- simmetria rispetto all'asse *x*: $Y5 = -Y4$
- dilatazione verticale: $Y6 = \frac{5}{2}Y5$



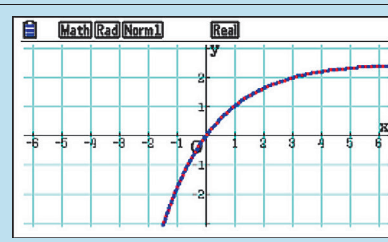
- Traslazione verticale: $Y7 = \frac{5}{2} + Y6$



Con il tasto **F6(DRAW)** rappresentiamo tutte le funzioni.



Possiamo anche evidenziare che Y1 e Y7 coincidono. Per farlo, possiamo deselezionare tutte le funzioni da 2 a 6, ci collochiamo su Y7 con la sequenza **F4(TOOL)**, **F1(STYLE)**, **F4(...)** così da rappresentare Y7 con un tratteggio.
Ora, avendo selezionato solo Y1 e Y7, possiamo rappresentare queste due curve e verificare che si sovrappongono.



Il teorema dei valori intermedi è applicabile nell'intervallo $[0, 3]$ perché la funzione $f(x)$ è continua in esso. Pertanto, la funzione assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo nel suddetto intervallo. Osservando che la funzione è monotona crescente, il minimo è necessariamente $f(0) = 0$ e il massimo è $f(3) = 2$.

Determiniamo ora la controimmagine di $y = \frac{3}{2}$:

$$\frac{3}{2} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cdot 5^{-\frac{x}{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2} \cdot 5^{-\frac{x}{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad 5^{-\frac{x}{3}} = \frac{2}{5}$$

Risolvendo l'equazione ottenuta, abbiamo che:

$$x = -3 \log_5 \frac{2}{5} = -3(\log_5 2 - \log_5 5) = -3\left(\frac{\ln 2}{\ln 5} - 1\right) \approx 1{,}7$$

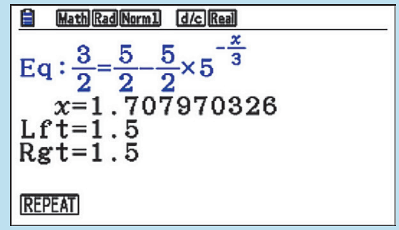
Osservando che il valore trovato è compreso tra il minimo e il massimo, ovvero $f(0) = 0$ e $f(3) \approx 2{,}01$, la tesi del teorema risulta verificata.

CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

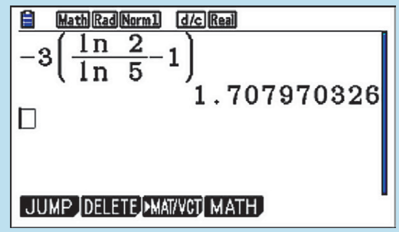
Controlliamo il risultato con la calcolatrice. Accediamo al menu **EQUAZIONI**, selezioniamo **F3(SOLVER)** e digitiamo l'equazione da risolvere:

$$\frac{3}{2} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cdot 5^{-\frac{x}{3}}$$

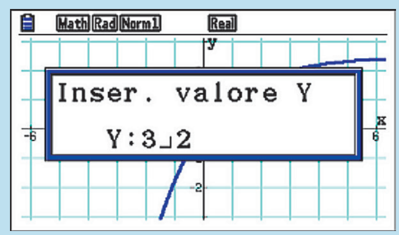
Digitando **F6(SOLVE)** otteniamo la soluzione $x = 1.707970326$.



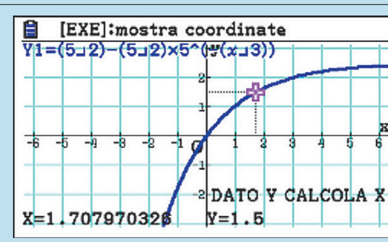
Entriamo nel menu **CALCOLI** e verifichiamo che il risultato ottenuto corrisponde a quanto trovato analiticamente, digitando $-3\left(\frac{\ln 2}{\ln 5} - 1\right)$. Il risultato è quello ottenuto in precedenza.



Verifichiamo anche graficamente questo risultato, tornando al menu **GRAFICI**. Possiamo deselezionare Y7, rappresentare Y1 (unica funzione a questo punto selezionata) con **F6(DRAW)** e cercare la controimmagine di $y = \frac{3}{2}$ con la sequenza **F5(G-Solv)**, **F6(▶)**, **F2(X-CAL)**. Inseriamo il valore $y = \frac{3}{2}$ e confermiamo con **EXE**.



La calcolatrice restituisce il valore $x = 1.707970326$, che corrisponde a quello trovato in precedenza.

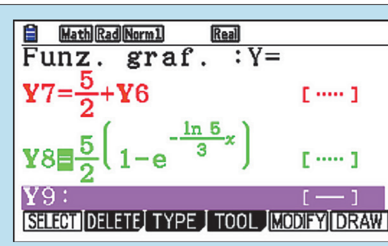


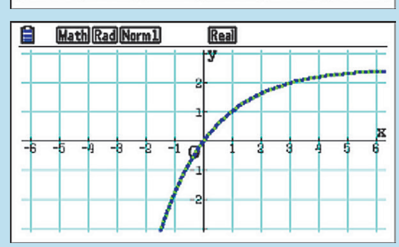
c. Riscriviamo la funzione $f(x) = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}e^{-\frac{\ln 5}{3}x} = \frac{5}{2}\left(1 - e^{-\frac{\ln 5}{3}x}\right)$ sostituendo la variabile x con il tempo t espresso in secondi e l'immagine $f(x)$ con la corrente $I(t)$ espressa in ampere:

$$I(t) = \frac{5}{2}\left(1 - e^{-\frac{\ln 5}{3}t}\right)$$

CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

Controlliamo di aver correttamente riscritto la funzione. Possiamo farlo graficamente rappresentando la funzione $f(x) = \frac{5}{2}\left(1 - e^{-\frac{\ln 5}{3}x}\right)$ in Y8, scegliendo il tratteggio e verificando che il suo grafico si sovrappone a quello di Y1.





Ricordiamo che la corrente elettrica di un circuito *RL* in fase di chiusura è descritta dalla funzione $I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, dove $\mathcal{E}$ è la forza elettromotrice (o tensione), *R* la resistenza e *L* l'induttanza, con costante di tempo del circuito $\tau = \frac{L}{R}$.

Confrontando questa espressione con quella precedente otteniamo:

$$\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{5}{2} = 2{,}5\ \text{A} \qquad \text{e} \qquad \tau = \frac{3}{\ln 5} \approx 5{,}86\ \text{s}$$

Poiché $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ e ricordando che la tensione è $\mathcal{E} = 0{,}50$ V, ricaviamo la resistenza e l'induttanza del solenoide:

$$R = \frac{\mathcal{E}}{I} = \frac{0{,}5\ \text{V}}{2{,}5\ \text{A}} = 0{,}20\ \Omega \qquad \text{e} \qquad L = \tau \cdot R = \frac{3}{\ln 5}\ \text{s} \cdot 0{,}2\ \Omega \approx 0{,}37\ \text{H}$$

Ricordiamo inoltre che l'induttanza del solenoide è legata al numero *N* degli avvolgimenti e all'area della loro superficie dalla relazione:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} A$$

con $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A² è la permeabilità magnetica, $l = 0{,}025$ m è la lunghezza del solenoide e $A = \pi r^2 = \pi \cdot 0{,}0075^2\ \text{m}^2 \approx 1{,}77 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$ è l'area degli avvolgimenti. Ricaviamo ora il numero di avvolgimenti *N*:

$$N = \sqrt{\frac{L \cdot l}{\mu_0 \cdot A}} \approx 6475$$

d. Per la seconda legge di Ohm, la resistenza è legata alla resistività ρ dalla relazione:

$$R = \rho \frac{\mathcal{L}}{S}$$

dove $\mathcal{L}$ è la lunghezza totale del filo che costituisce il solenoide e *S* è la sua sezione.
La lunghezza del filo del solenoide è $\mathcal{L} = N \cdot 2\pi r \approx 305$ m.
Ricordando che la resistività del rame è $\rho = 1{,}72 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$, si ricava la sezione:

$$S = \rho \frac{\mathcal{L}}{R} \approx 2{,}62 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^2.$$

PER APPROFONDIRE

e. L'andamento della corrente elettrica nel circuito *RL* in fase di apertura è rappresentato dalla funzione $I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ ovvero, nel nostro caso:

$$I(t) = \frac{5}{2} e^{-\frac{\ln 5}{3} t} = \frac{5}{2} \cdot 5^{-\frac{t}{3}}$$

Si tratta di una funzione esponenziale decrescente, con asintoto orizzontale destro costituito dall'asse *x*, in quanto $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{2} \cdot 5^{-\frac{t}{3}} = 0$.

f. Nel circuito *RC* la carica variabile nel tempo presente sulle armature del condensatore di capacità *C* in fase di carica è descritta dalla funzione:

$$q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

analoga a quella che, nel circuito *RL*, rappresenta la corrente $I(t)$. Tuttavia, in questo caso la costante di tempo è data da $\tau = RC$.
Un'altra differenza riguarda il fatto che la funzione che rappresenta la corrente nel circuito *RC* è sempre decrescente, sia nel caso della carica sia nel caso della scarica, ed è descritta dalla funzione già incontrata nel punto **e.**:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$