Test di ingresso - Classe terza

Forniamo una selezione di esercizi che le studentesse e gli studenti dovrebbero essere in grado di affrontare al termine del percorso del primo biennio. I docenti potranno selezionare quelli che meglio si possono adattare alle proprie classi.

Prima parte: numeri e algebra

1. Semplifica la seguente espressione, esprimendola mediante una frazione ridotta ai minimi termini:

$$\left(\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{11}{6}}\right)^2$$

LIVELLO 1

$$\left(\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{11}{6}}\right)^2=\left(\frac{11}{12}\cdot\frac{6}{11}\right)^2=\frac{1}{4}$$

2. È vero che il quadrato di $-\sqrt{5}$ è 5?

LIVELLO 1

Sì: $\left(-\sqrt{5}\right)^2=+\left(\sqrt{5}\right)^2=5$

3. È vero che la metà di $\sqrt{16}$ è $\sqrt{8}$?

LIVELLO 1

No: $\frac{\sqrt{16}}{2}=\frac{4}{2}=2$, mentre $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$

4. Scrivi come un'unica frazione la somma $\frac{1}{x}+x$.

LIVELLO 1

$$\frac{1+x^2}{x}$$

5. Scrivi come prodotto o potenza i seguenti polinomi:

a. x^2-4x+3 **b.** x^2-25 **c.** $x^2+10x+25$

LIVELLO 1

a. $(x-3)(x+1)$; **b.** $(x+5)(x-5)$; **c.** $(x+5)^2$

6. Enuncia il primo e il secondo principio di equivalenza delle equazioni.

LIVELLO 1

<u>Primo principio di equivalenza</u>

Addizionando o sottraendo da entrambi i membri di un'equazione una stessa quantità, l'equazione viene trasformata in un'equazione equivalente a quella data.

<u>Secondo principio di equivalenza</u>

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per una stessa quantità diversa da zero, l'equazione viene trasformata in un'equazione equivalente a quella data.

7. Risolvi le seguenti equazioni.

a. $12x-7=29$ **b.** $(x+4)(2x-1)=0$

LIVELLO 1

a. 3; **b.** $-4,\ \frac{1}{2}$

8. Risolvi le seguenti disequazioni.

a. $-3x > 0$ **b.** $2x - 1 < \frac{1}{2}$

LIVELLO 1

a. $x < 0$; **b.** $x < \frac{3}{4}$

9. Trova i valori del numero intero m per i quali la frazione $\dfrac{2m-1}{3m-2}$:

- **a.** è nulla;
- **b.** non ha significato.

LIVELLO 2

a. $m = \frac{1}{2}$

b. $m = \frac{2}{3}$

10. Se possibile, semplifica la seguente frazione.

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$$

LIVELLO 2

Si pone $x \neq 2$.

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \frac{x-3}{x-2}$$

11. Calcola il valore della seguente espressione (dove n è un numero intero).

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}$$

LIVELLO 2

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 1 - 4 = -3$$

12. Scrivi 9^x come potenza di 3. Se $9^x = 3^{12}$, quanto vale x?

LIVELLO 2

$9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$

$3^{2x} = 3^{12}$ da cui $x = 6$

13. Sara scrive $\sqrt{a^2} = a$. Commenta questa uguaglianza.

LIVELLO 2

Se $a \geq 0$ è vera, se $a < 0$ no. Ad esempio, se $a = -3$, vale: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$. Affinché sia sempre corretta, dovrebbe essere $\sqrt{a^2} = |a|$.

14. Due numeri interi consecutivi sono tali che la metà della somma del minore con il doppio del maggiore è 19. Qual è il numero maggiore?

LIVELLO 3

Chiamiamo i due numeri $n, n+1$ ($n \in \mathbb{Z}$). Traduciamo il testo del problema in equazione:

$$\frac{n + 2(n+1)}{2} = 19$$

$3n + 2 = 38$
$n = 12$
Il numero maggiore è 13.

15. Risolvi la seguente equazione, discutendo per quali valori del parametro a essa ha soluzione:
$2x(a + 1) = a$
Stabilisci poi qual è la soluzione nel caso in cui $a = 1$.
LIVELLO 2
$x = \frac{a}{2(a+1)}$ per $a \neq -1$
Per $a = 1$ la soluzione è $x = \frac{1}{4}$.

16. Risolvi la disequazione:
$x^4 + 5x^3 > 0$
LIVELLO 2
$x^3(x + 5) > 0$
Il numeratore è positivo per $x > 0$; il denominatore è positivo per $x > -5$. Per la regola dei segni, il prodotto è positivo per $x < -5 \vee x > 0$.

17. Quali valori di x e y soddisfano contemporaneamente le equazioni $\frac{1}{2}x + 3y = 5$ e $x - y = 3$?
LIVELLO 2
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 6y = 10 \\ x - y = 3 \end{cases}$$
Ad esempio, per riduzione sottraendo la seconda alla prima, otteniamo: $7y = 7$, da cui $y = 1$ e $x = 4$.

18. Spiega perché non può mai valere $\sqrt{2x - 1} + 7 = 4$ per alcun valore di x.
LIVELLO 2
Scriviamo l'equazione come $\sqrt{2x - 1} = -3$ (deve essere $2x > 1$, cioè $x > \frac{1}{2}$). Poiché la radice è sempre positiva, l'equazione è impossibile.

19. Per stampare il suo ultimo *best seller*, una piccola casa editrice deve sostenere un costo fisso di 3000 euro e un costo di 6 euro per ogni libro stampato. La casa editrice rivende i libri a un prezzo medio di 12 euro l'uno. Quanti libri deve stampare e vendere la casa editrice affinché il suo margine di guadagno superi il 50% della spesa effettuata?
LIVELLO 3
Chiamiamo n il numero di libri stampati e venduti ($n \in \mathbb{N}$).
Costo: $3000 + 6n$
Ricavo: $12n$
Guadagno: $12n - (3000 + 6n) = 6n - 3000$
La disequazione che traduce il problema è:
$$6n - 3000 > \frac{3000 + 6n}{2}$$
$3n > 4500$
da cui otteniamo che il numero di copie stampate e vendute deve essere maggiore di 1500.

20. I fusilli che ha in casa Lucia cuociono in 11 minuti. A casa di Lucia, però, ci sono solo due clessidre: una da 3 minuti e una da 7. Come può fare per sapere quando è pronta la pasta?
LIVELLO 3
Fa partire insieme le due clessidre. Quando quella da 3 minuti termina, Lucia può buttare la pasta: la clessidra da 7 finirà dopo 4 minuti. A quel punto, basta rigirare la stessa clessidra e si arriva agli 11 minuti di cottura desiderati.

Seconda parte: funzioni e grafici

1. Come si definisce una *funzione*?
LIVELLO 1
Dati due insiemi $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ non vuoti, si dice funzione da $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ una relazione che a ogni elemento di $\mathbf{A}$ associa uno e un solo elemento di $\mathbf{B}$.

2. Qual è il dominio della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$?
LIVELLO 1
$x^2 - 4 \neq 0$, da cui $\mathbf{D} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq \pm 2\}$

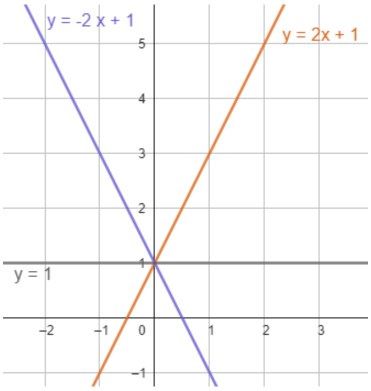
3. Qual è il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{2-x}$?
LIVELLO 1
$2 - x \geq 0$, da cui $\mathbf{D} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 2\}$

4. Una funzione $f: \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ è tale che, se $x_1 \neq x_2$, allora $f(x_1) \neq f(x_2)$. Come si dice una funzione con questa proprietà?
LIVELLO 1
La funzione è iniettiva.

5. Calcola le coordinate del punto medio del segmento di estremi $P(1; 2)$ e $Q(2; 4)$.
LIVELLO 1
$M\left(\frac{3}{2}; 3\right)$

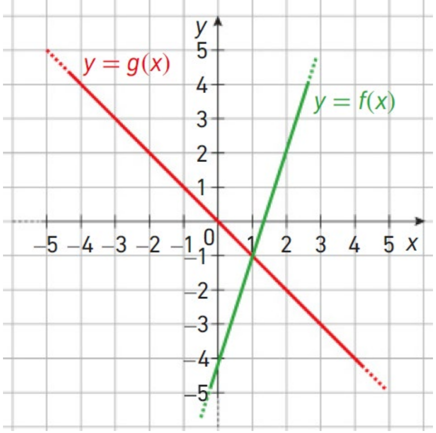
6. Scrivi l'equazione della retta che passa per i punti $A(-1; 3)$ e $B(-5; 11)$.
LIVELLO 1
$m = \frac{11-3}{-5+1} = -2$
La retta è della forma $y = -2x + q$. Imponendo il passaggio per A, si ottiene:
$3 = 2 + q \;\Rightarrow\; q = 1$
Allora la retta è $y = -2x + 1$.

7. Calcola la lunghezza del segmento PQ che ha estremi nei punti $P(3; 1)$ e $Q(-2; -2)$.
LIVELLO 1
$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{25+9} = 6$

8. Disegna il grafico di $y = 2x + 1$, di $y = -2x + 1$ e di $y = 1$. Che cosa hanno in comune?
LIVELLO 1
Grafici:


Le tre rette passano tutte per il punto $(0; 1)$.

9. Nel grafico seguente sono rappresentate due funzioni lineari. Scrivi la loro espressione analitica e risolvi graficamente e analiticamente la disequazione $f(x) > g(x)$.



LIVELLO 2

$f(x) = 3x - 4, g(x) = -x$

La disequazione è $3x - 4 > -x$.

Risoluzione analitica. Possiamo addizionare $x + 4$ a entrambi i membri (primo principio) e abbiamo: $4x > 4$. Dividendo per 4 entrambi i membri (secondo principio, con costante moltiplicativa positiva), abbiamo $x > 1$.

Risoluzione grafica. Osservando il grafico, la funzione f "sta sopra" alla funzione g per valori di x maggiori dell'ascissa del punto di intersezione (che si trova risolvendo $3x - 4 = -x$, che dà $x = 1$).

L'insieme delle soluzioni a cui siamo giunti in entrambi i modi è $\mathbf{S} = \{x \in \mathbb{R}: x > 1\}$

10. Qual è la caratteristica comune a tutte le rette di equazione $y = m(x - 1)$, al variare di $m \in \mathbb{R}$?

LIVELLO 3

Passano per il punto $(1; 0)$.

Terza parte: geometria

1. Enuncia i due teoremi di Euclide.

LIVELLO 1

<u>Primo teorema di Euclide</u>

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti all'ipotenusa e alla proiezione del cateto sull'ipotenusa.

<u>Secondo teorema di Euclide</u>

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha i lati congruenti alle due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

2. Enuncia il quinto postulato di Euclide.

LIVELLO 1

Data una retta r e un punto $P \notin r$, la retta s passante per P e parallela a r è unica.

3. Un quadrato ha lato che misura 1 cm. Quanto è lunga la sua diagonale?

LIVELLO 1

$\sqrt{2}$ cm

4. Come si chiama il luogo dei punti equidistanti da due punti distinti A e B?

LIVELLO 1

È l'asse del segmento AB.

5. Il terzo criterio di congruenza afferma che, se due triangoli hanno tre angoli congruenti, allora sono congruenti. Commenta questa frase.

LIVELLO 2

Non è corretto: il terzo criterio di congruenza afferma che, se due triangoli hanno tre lati congruenti, allora sono congruenti.

Se due triangoli hanno i tre angoli congruenti, possiamo solo concludere che sono simili (ad esempio: due qualsiasi triangoli equilateri sono simili ma non per forza congruenti).

6. Quali parallelogrammi notevoli hanno le diagonali congruenti? E quali hanno le diagonali perpendicolari?

LIVELLO 2

I rettangoli hanno le diagonali congruenti (e di conseguenza anche i quadrati, che sono rettangoli); i rombi hanno le diagonali perpendicolari (e di conseguenza anche i quadrati, che sono rombi).

7. Due triangoli rettangoli isosceli sono simili? Perché?

LIVELLO 2

Ogni triangolo rettangolo isoscele ha un angolo di 90° (poiché rettangolo) e gli altri due di 45° (poiché isoscele). Allora, presi due triangoli isosceli, essi avranno sempre tutti e tre gli angoli congruenti. Questa è una condizione sufficiente alla similitudine di due triangoli (poiché avere tre angoli congruenti implica l'avere anche i tre lati ordinatamente in proporzione), quindi la risposta è affermativa: due triangoli rettangoli isosceli sono simili.

8. Una casa con la pianta a forma rettangolare con i lati a e b è circondata da un marciapiede che ha larghezza c. La pianta complessiva della casa, marciapiede incluso, è ancora un rettangolo.
Qual è l'area del marciapiede espressa in termini di a, b e c?

LIVELLO 2

$(a+2c)(b+2c) = ab + 2ac + 2bc + 4c^2$

(I quattro addendi sono: l'area della base della casa; i due rettangoli davanti ai due lati di lunghezza a; i due rettangoli davanti ai due lati di lunghezza b; i quattro quadratini di marciapiede negli angoli.)

9. Due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono tali che $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 2$.

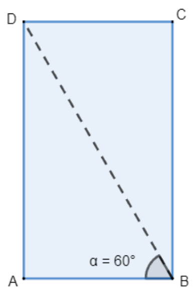
- **a.** Come sono tra loro questi triangoli?
- **b.** Quanto vale il rapporto tra l'area di ABC e quella di $A'B'C'$?

LIVELLO 2

a. Sono simili; **b.** 4

10. Nel rettangolo $ABCD$ l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}D$ è 60°. Dimostra che $AD^2 = 3AB^2$.

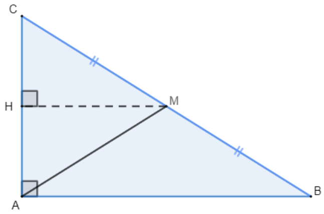
LIVELLO 3



Il triangolo ABD è metà di un triangolo equilatero. Perciò $BD = 2AB$. Allora:
$AD^2 = BD^2 - AB^2 = 4AB^2 - AB^2 = 3AB^2$

11. Dimostra che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è la metà dell'ipotenusa stessa.

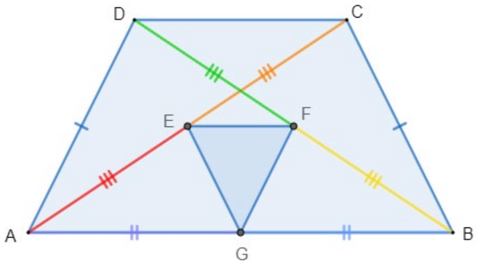
LIVELLO 3

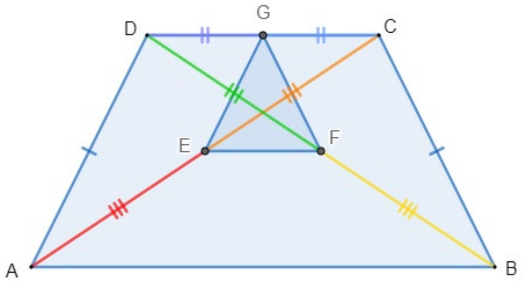


Usiamo la notazione in figura, in cui ABC è il triangolo rettangolo, con angolo retto nel vertice A, e M è il punto medio dell'ipotenusa.
Ci sono tanti modi per dimostrare questo teorema. Diamo qui una possibile dimostrazione.
Consideriamo MH perpendicolare ad AC. Osserviamo che MH e AB sono così paralleli.
Per il teorema di Talete, poiché $CM \cong MB$ e i due segmenti MH e AB sono paralleli, abbiamo che $CH \cong HA$. Ma allora i triangolo MHC e MHA sono congruenti (perché hanno MH in comune, $M\hat{H}C \cong M\hat{H}A$ e $CH \cong HA$). Allora $AM \cong MC$, quindi AM è metà di BC.

12. Dimostra che in un trapezio isoscele i punti medi delle diagonali e il punto medio di una base sono vertici di un triangolo isoscele.

LIVELLO 3





Usiamo la notazione in figura, in cui il trapezio è isoscele con lati BC e AD congruenti, e i punti E, F, G sono i punti medi di AC, BD e AB rispettivamente. In un trapezio isoscele le diagonali sono congruenti (nel nostro caso $AB \cong BD$), perciò anche $AE \cong EC \cong BF \cong FD$.
I triangoli ABC e ABD sono congruenti (per il terzo criterio), quindi in particolare $B\hat{A}C \cong A\hat{B}D$.
I triangoli AGE e GBF sono congruenti allora per il primo criterio ($AG \cong GB, AE \cong BF, G\hat{A}E \cong G\hat{B}F$). Di conseguenza, $GE \cong GF$: il triangolo GFE è isoscele.

Se si prende G sulla base minore, il ragionamento è lo stesso: arriviamo a dire che i triangoli ECG e FDG sono congruenti per il primo criterio, e quindi che $GE \cong GF$, da cui la tesi.